

## מבוא

בלוגיקה המתמטית אנו חוקרים את השפה של המתמטיקה, ואת הקשר שלה עם העצמים המתמטיים. כשאנו מדברים בהקשר זה על השפה של המתמטיקה איננו מתכוונים לשפה בה אנו משתמשים כשאנו מדברים בינינו על מתמטיקה. השפה בה אנו מדברים בינינו על מתמטיקה היא בעיקרה עברית בתו-ספת מונחים מתמטיים, אותיות לטיניות ויווניות וסימנים מתמטיים. השפה הזאת גם אינה שפה ברורה לגמרי, כי אנו מדברים לעיתים ברמזים וסומכים על השומע שיבין למה אנו מתכוונים. השפה המתמטית בה אנו נעסוק היא שפה מתמטית פורמלית המכילה אותיות לטיניות, סימני פיסוק וסימנים מתמטיים בלבד. שפה זאת היא, מצד אחד, שפה שסימניה מצומצמים במידה כזאת המאפשרת בנקל מתן פשר ברור לגמרי לכל הביטויים בה, ומצד שני, היא שפה עשירה למדי כך שאפשר להביע בה כל טענה מתמטית. שפה זאת נמצאת ברקע של השפה בה אנו מדברים למעשה על מתמטיקה, במובן שכל טענה מתמטית אותה אנו אומרים בעברית ניתן לראותה כתרגום לעברית של טענה בשפה המתמטית הפורמלית. אם אנו מביעים טענה מתמטית בעברית ואיננו מצליחים לתרגמה לשפה המתמטית הפורמלית פירושו של דבר הוא שפשוט לא ברור לנו מהי הכוונה המדויקת של מה שאנו אומרים. למרות שאנו עוסקים רק בשפה המתמטית נביא לעתים גם דוגמאות מן השפה הרגילה בה אנו משתמשים בחיי יום יום. מקובל לכנות שפה רגילה כזאת בשם שפה טבעית (natural language). שפה טבעית יכולה להיות עברית או אנגלית או כל שפה מדוברת אחרת.

בחקר של שפה כלשהי אנו יכולים להבחין בשני חלקים. חלק אחד הוא התחביר (syntax) של השפה הכולל בתוכו את חלקו הגדול של הדיקדוק של השפה. זהו החלק הקובע אילו הן המילים התקינות של השפה ומהם המשפטים המנוסחים נכונה של השפה. החלק השני, הנקרא סמנטיקה (semantics), עוסק בקשר שבין השפה לבין העולם שהשפה מדברת עליו. הנושא של אמת ושקר הוא נושא מובהק של הסמנטיקה כי הקביעה אם פסוק הוא אמיתי או שקרי נעשית על סמך מידע חיצוני. למשל, לא נוכל לדעת אם הפסוק "בשנת 1988 לא היו בירושלים בניינים בעלי יותר מ-20 קומות" הוא אמיתי או שקרי באמצעות ידיעת כללי הדיקדוק של השפה העברית אלא אנו צריכים לדעת לשם כך מה היו מספרי הקומות של הבניינים השונים בירושלים בשנת 1988.

מטבעו של דבר קווי ההבחנה בין התחביר לסמנטיקה ברורים הרבה יותר בשפה מתמטית מאשר בשפה טבעית. עוד הבדל חשוב בין שפה מתמטית לשפה טבעית הוא שבשפה טבעית ישנם משפטים רבים הבנויים היטב מבחינה דקדוקית אבל הם חסרי משמעות, כגון הפסוק "יוסף ישן מהר". אין הדבר כן בשפה המתמטית בה כל ביטוי בנוי היטב הוא בעל משמעות.

בדרך כלל, כאשר אנו רוצים לדעת אם טענה מתמטית היא אמיתית בעולם מתמטי אנו צריכים להתבונן לשם כך בעולם זה. אולם, ישנו חלק של הסמנטיקה, הנקרא תורת ההיסק (deductive theory), העוסק בקביעת כללים המאפשרים לנו לדעת שטענות מסוימות הן אמיתיות בעולם מתמטי מבלי להתבונן בעולם מתמטי זה אלא רק מתוך הידיעה שטענות מסוימות אחרות אמיתיות באותו עולם. למשל, כללים כאלו מאפשרים לנו לדעת שהפסוק  $2 = 2$  אמיתי בעולם מתמטי בו יש ל-2 משמעות, וזאת מבלי להתבונן בעולם מתמטי זה. למשל, כללים כאלו מאפשרים לדעת שאם אקסיומות הגיאומטריה המישורית אמיתיות במישור מסויים אז גם אמיתית באותו מישור הטענה שזוויות הבסיס של משולש שווה שוקים הן שוות.